__Διάλεξη 1η__

NO:
DATE: 14/10/2019

ΕΥΚΛΕΙΔΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚ. ΓΕΩΜ.

• chtatakis-mathnet.gr.

__Αξιώματα Ευκλείδη:__

1) Από κάθε σημείο και προς κάθε άλλο, άγεται μοναδική ευθεία.
2) Κάθε ευθεία προεκτείνεται στο άπειρο.
3) Με τυχαίο σημείο και τυχαία ακτίνα γράφεται κύκλος.
4) Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
5) Αν 2 ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία έτσι ώστε το άθροισμα των εντός και επί ταυτά γωνιών να είναι μικρότερο των 2 ορθών, τότε οι 2 αυτές ευθείες τέμνονται προς το μέρος εκείνο που το άθροισμα είναι μικρότερο των 2 ορθών.

Εύδοξος: Γεωμετρία + Ζωμετρία (Εκδ. Κίδορ)
+ σημειώσεις κ. Βλάχου (∃ στο site του)

ΕΥΚΛΕΙΔΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚ.

21/10/2019)

▶ Ένα αξιωματικό σύστημα οφείλει να είναι πλήρες, δηλαδή να είναι:

i) ανεξάρτητο (δεν υπάρχει αξίωμα που προκύπτει από τα υπόλοιπα)

ii) συμβιβαστό (είναι αδύνατο να αποδείξουμε και την άρνηση και την κατάφαση μιας πρότασης)

iii) πληρότητα → (για κάθε πρόταση είναι δυνατόν να αποδείξουμε είτε την άρνηση ή την κατάφαση)
- Goedel -

Αξιώματα Hilbert:

A) Αξιώματα θέσης: Θ1) Για δύο διακεκ. σημεία Α, Β υπάρχει μοναδική ευθεία που τα περιέχει.

Θ2) Κάθε ευθεία περιέχει δύο σημεία τουλάχιστον.

Θ3) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

Π) (*)

Πρόταση: Δύο διαφορετικές ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο

↳ Αν $(\varepsilon_1) \neq (\varepsilon_2)$ και έστω $A \neq B$ κοινά σημεία τους.
Αυτό είναι άτοπο από Θ1

Π) (*) Για κάθε σημείο Α και κάθε ευθεία (ε), υπάρχει το πολύ μια ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι // της (ε)

▸ Μοντέλο που ικανοποιεί τα Θ1-Θ3.:

Θεωρώ σύνολο σημείων {Α, Β, Γ}
ευθείες : {Α, Β}, {Α, Γ}, {Β, Γ}
Οπότε άμεση ισχύουν τα Θ1, Θ2, Θ3.

*παράλληλη → δεν έχουν κοινά σημεία

<u>Πρόταση:</u> Τα Θ1, Θ2, Θ3 είναι ανεξάρτητα

<u>Απόδ</u>

Εύρεση μοντέλου που ικανοποιούνται τα Θ1-Θ3 και όχι το Π.
σημεία: {Α, Β, Γ, Δ, Ε}
ευθείες: {Α, Β}, {Α, Γ}, {Α, Δ}, {Α, Ε}, ...
Έστω το σημείο Α και η ευθεία {Δ, Ε}.
Τότε υπάρχουν οι {Α, Β}, {Α, Γ} οι οποίες διέρχονται από το Α και είναι // στην {Δ, Ε}
Έτσι βρήκα μοντέλο που ικανοποιούνται τα Θ1, Θ2, Θ3 και όχι το Π.
Τώρα θα θεωρήσω τα σημεία: {Α, Β}
και τις ευθείες : {Α, Β}
Ισχύουν τα Θ1, Θ2 και το Π (διότι δεν υπάρχει <u>καμία</u> ευθεία // {Α, Β})
Άρα ικανοποιούνται οι Θ1, Θ2, Π και όχι το Θ3.
Έπειτα θα θεωρήσω τα σημεία {Α, Β, Γ},
και τις ευθείες: {Α, Β}, {Β, Γ}, {Α, Γ}, {Α}
Ικανοποιούνται τα Θ1, Θ3, Π και όχι το Θ2
Και τέλος θα θεωρήσω τα σημεία: {Α, Β, Γ}
και τις ευθείες: ∅ (καμία)
Προφανώς ισχύουν τα Θ2, Θ3, Π και όχι το Θ1.
Άρα το παραπάνω σύστημα αξιωμάτων είναι ανεξάρτητο.

▶ Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (μοντέλο που ικανοποιεί τα Θ1-Θ3, Π).

- σημεία: (x, y)
- ευθείες: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, όπου $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$

Θ1) Έστω τα σημεία $P_1(x_1, y_1) \neq P_2(x_2, y_2)$
ύπαρξη ευθείας (ε): $P_1, P_2 \in (\varepsilon)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow$$
$$y_2 x - y_1 x - y_2 x_1 + y_1 x_1 = $$
$$y x_2 - y x_1 - y_1 x_2 + y_1 x_1 \Rightarrow$$
$$(y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

<u>Μοναδικότητα:</u>

Έστω αυτή $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$
και έστω (ε'): $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$: $P_1, P_2 \in (\varepsilon')$
$\left((\alpha', \beta', \gamma') \neq (0,0,0)\right)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ το (Σ): $\begin{cases} \alpha x + \beta y = -\gamma \\ \alpha' x + \beta' y = -\gamma' \end{cases}$ έχει τουλάχιστο δύο διαφορ. λύσεις

$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right)$

$\Rightarrow$ Το (Σ) έχει άπειρες λύσεις.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \lambda(\alpha', \beta', \gamma')$, $\lambda \neq 0$
$\Rightarrow$ ε, ε' ταυτίζονται.

Θ2) Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία.

$(\varepsilon): \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$
$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

Υποθέτω $x\beta\gamma$: $\beta \neq 0$: $x = 0 \Rightarrow$ το σημείο $\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right) \in (\varepsilon)$.

Εάν $\alpha = 0$ τότε υπάρχουν άπειρα σημεία π.χ. το $(1, -\gamma/\beta)$ και έτσι το Θ2 ✓

Εάν $\alpha \neq 0$, π.χ. το $\left(\alpha, \frac{-\gamma - \alpha^2}{\beta}\right)$

Θ3) Υπάρχουν τουλάχιστον 3 μη-συνευθειακά σημεία.

Έστω $(\varepsilon): \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$
Παρατηρώ ότι: έστω $(0,0), (1,0), (0,1) \in (\varepsilon)$

$\gamma = 0$ $\quad$ $\alpha + \gamma = 0$ $\quad$ $\beta + \gamma = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$: άτοπο

5

Π) Θεωρώ ευθεία $(\varepsilon_1): \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$
$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (0,0,0)$
και έστω $P(x_0, y_0) \notin (\varepsilon_1)$
Θνδο $\exists$ ευθεία που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη της (ε_1).

Αν $P \in (\varepsilon_1)$, δεν υπάρχει καμία παράλληλη

Έστω η $(\varepsilon): \alpha_1 x + \beta_1 y + (-\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0) = 0$
και προφανώς $P \in (\varepsilon)$ και $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_1)$

(*) Γνωρίζουμε ότι $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_1)$ όταν το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + (-\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

είναι αδύνατον, δηλαδή δεν έχει λύσεις.
Εάν υπήρχε λύση (x', y') $\xrightarrow{(1)}$ $\gamma_1 = -\alpha_1 x' - \beta_1 y'$
και ικανοποιείται η (2): $-(\alpha_1 x' + \beta_1 y') = (-\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0)$
$\Rightarrow \gamma_1 = -\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0$: Άτοπο

Μοναδικότητα:
Έστω $(\varepsilon_2): \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$ με $P \in (\varepsilon_2)$
και $(\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_1)$. Ισχύει ότι $P \in (\varepsilon_2)$ και $P \notin (\varepsilon_1)$. Γνωρίζουμε ότι 2 ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο. Άρα το

$$(\Sigma): \begin{cases} (\varepsilon) = 0 \\ (\varepsilon_2) = 0 \end{cases}$$ έχει μοναδική λύση

$$\det(\Sigma) \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{άρα} \quad \begin{cases}(\varepsilon_1)=0 \\ (\varepsilon_2)=0\end{cases}$$

μοναδ. λύση $\Rightarrow$ <u>άτοπο</u>

<u>Αξιώματα θέσεις στον χώρο:</u>

Θ4) Για κάθε τρία μη συνευθειακά σημεία, υπάρχει μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει.
(*) Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο.

Θ5) αν $P_1 \neq P_2$ ανήκουν στο ίδιο επίπεδο $\Rightarrow$ και η ευθεία που ορίζουν ανήκει στο επίπεδο

Θ6) Αν π_1, π_2 διαφορετικά επίπεδα που έχουν κοινό σημείο A $\Rightarrow$ έχουν κι άλλο κοινό σημείο.

Θ7) Υπάρχουν τουλάχιστον 4 σημεία, διαφορετικά, που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο

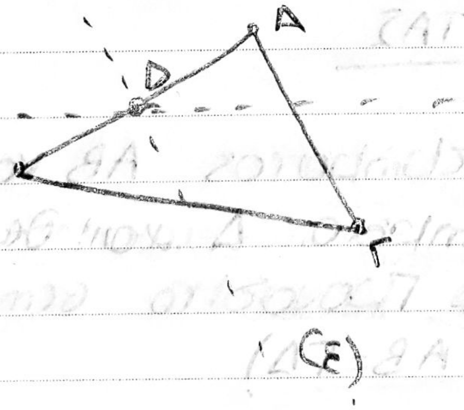
Αξιώματα Διάταξης: Αν σημείο Β, είναι ανάμεσα στα Α,Γ συμβ: $A*B*\Gamma$.

Δ1) Αν $A*B*\Gamma \Rightarrow$ τα A, B, Γ διαφορετικά ανά δύο, είναι συνευθειακά και $\Gamma*B*A$.

Δ2) Για οποιαδήποτε $A \neq \Gamma$, υπάρχει B: $A*B*\Gamma$

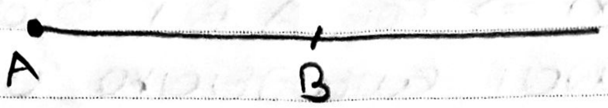
Δ3) Ανάμεσα σε τρία διαφορετικά συνευθ. σημεία το ένα είναι ανάμεσα στα άλλα.

Δ4) Έστω A, B, Γ τρία μη συνευθειακά σημεία (Pasch) και (ε) ευθεία που δεν περιέχει αυτά. Αν η (ε) διέρχεται από το Δ: $A*\Delta*B$.
$\Rightarrow$ ή η (ε) περιέχει σημείο το οποίο είναι ανάμεσα στα A, Γ
ή η (ε) περιέχει σημείο το οποίο είναι ανάμεσα στα B, Γ.



Ορισμός: Ορίζουμε ως ευθύγραμμο τμήμα το σύνολο σημείων που περιέχει τα Α, Β και κάθε σημείο ανάμεσά τους.

Ορισμός: Ορίζουμε ως ημιευθεία (AB) το σύνολο των σημείων με αρχή το A και κάθε άλλο σημείο προς την πλευρά του B.



Ορισμός: Έστω μη συνευθειακά A, B, Γ. Ορίζουμε ως τρίγωνο την ένωση των ευθ. τμημάτων AB, AΓ, BΓ

Ορισμός: Ορίζεται η γωνία, ως η ένωση 2 ημιευθειών AB, AΓ με κοινό (σημείο) A (το οποίο καλείται κορυφή της γωνίας), οι οποίες δεν είναι μέρος της ίδιας ευθείας.

Πρόταση: Έστω γωνία $B\hat{A}Γ$ και Δ εσωτερικό σημείο αυτής. Η ημιευθεία AΔ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BΓ

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

I1) Δοθέντος ευθ. τμήματος AB και σημείου $Γ \notin AB$ και θεωρώ ημιευθεία με αρχή το Γ, υπάρχει σημείο Δ μοναδικό στην ημιευθεία αυτή

I2) αν AB = ΓΔ και AB = EZ ⇒ ΓΔ = EZ. Επιπλέον κάθε ευθ. τμήμα είναι ίσο με τον εαυτό του.

Ι3) Έστω Α, Β, Γ σημεία μιας ευθείας
Α * Β * Γ και Α', Β', Γ' σημεία μιας ευθείας
Α' * Β' * Γ'

Αν $\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \text{και } B\Gamma = B'\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow A\Gamma = A'\Gamma'$

Θεώρημα: Η ισότητα ευθ. τμημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Από το θεώρημα αυτό, ορίζω την πρόσθεση ευθ. τμημάτων ΑΒ + ΓΔ.

Έστω ΑΒ ευθ. τμήμα

Θεωρώντας ημιευθεία με αρχή το Β και στην προέκταση του ΑΒ από Ι1, υπάρχει Ε σημείο της ημιευθείας τ.ω: ΒΕ = ΓΔ.

Ορίζουμε το ΑΒ + ΓΔ = ΑΕ.